钢丝杨氏模量的测定

唐延宇 PB22030853

2023 年 5 月 2 日

1 实验目的

杨氏模量是一个用来表征材料在纵向拉伸能力强弱的物理量, 它反映了为使某种弹性材料在纵向产生单位应变时, 需要施加的应力大小. 此外, 由于杨氏模量可以表征材料的强度, 它往往也被作为检测工业产品质量的指标之一. 由此可见, 杨氏模量的测量在科学研究与实际生产中均具有较大意义. 本实验的目的即利用光杠杆法放大钢丝拉伸时的微小形变, 从而测定钢丝的杨氏模量.

2 实验原理

本实验的主要思路是通过光杠杆法放大钢丝的长度变化 Δl, 从而使 Δl 的测量更加简便, 同时减小误差. 在材料的弹性限度内, 杨氏模量有如下定义式:

$$E = \frac{F/S}{\Delta L/L} \tag{1}$$

在本实验的装置中, 平面镜支脚通过细绳与管制器相连, 使得当钢丝被拉长而带动平面镜支脚下降时, 平面镜法线方向也转过 θ 角此时标尺发出的入射与反射光线转过 2θ 角. 实验装置如图 2所示. 与此同时, 标尺上的读数将改变 Δx, 从图 2可看出:

$$\tan 2\theta = \frac{\Delta x}{D} \tag{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta L}{l} \tag{3}$$

其中 l 为平面镜两端间距, 又称为光杆杆臂长. 在 θ 较小时, 有如下近似:

$$\tan\theta \approx \theta \tag{4}$$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{\Delta x l}{2D} \tag{5}$$

从而可得:

$$E = \frac{2DLF}{Sl\Delta x} \tag{6}$$

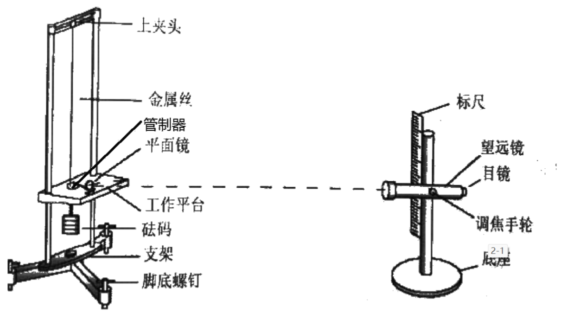

图 1: 实验装置图

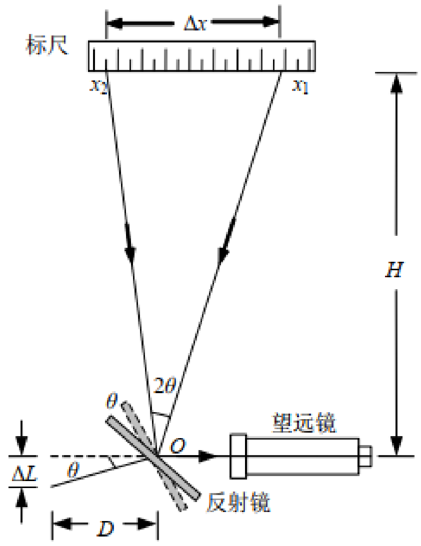

图 2: 光杠杆原理图

表 1: b 与 F 数据记录表

F/N	4.895	9.79	14.685	19.58	24.475	29.37	34.265
$\bar{b_i}$/cm	0.585	2.075	3.47	5.06	6.72	7.75	9.60

测量多组 F 与 Δx 后, 进行最小二乘法拟合, 记 $F = M\Delta x$, 则有:

$$E = \frac{2DL}{SlM} \tag{7}$$

3 实验仪器

本实验使用的主要仪器有: 平面镜、标尺、望远镜、金属丝、管制器、砝码、砝码托、钢卷尺、塑料直尺、螺旋测微器. 其中测量仪器的最大允差数据如下: 塑料直尺 $\Delta_l = 0.15\,\text{mm}$, 钢卷尺 $\Delta_L = 0.2\,\text{cm}$, 螺旋测微器 $\Delta_d = 0.004\,\text{mm}$.

4 数据处理

原始数据可参见附录一, 下面将首先对 b 与 F 进行处理, 利用最小二乘法计算 M 值. b 与 F 的关系如表 1所示, 取 $g = 9.79$: 利用 Origin 作图及最小二乘法拟合可得:

$$\hat{M} = 0.303\,85\,\text{cm}\cdot\text{N}^{-1} \tag{8}$$

$$r = 0.999 \tag{9}$$

所得图像如图 3所示. 实验中测得各物理量的均值如下:

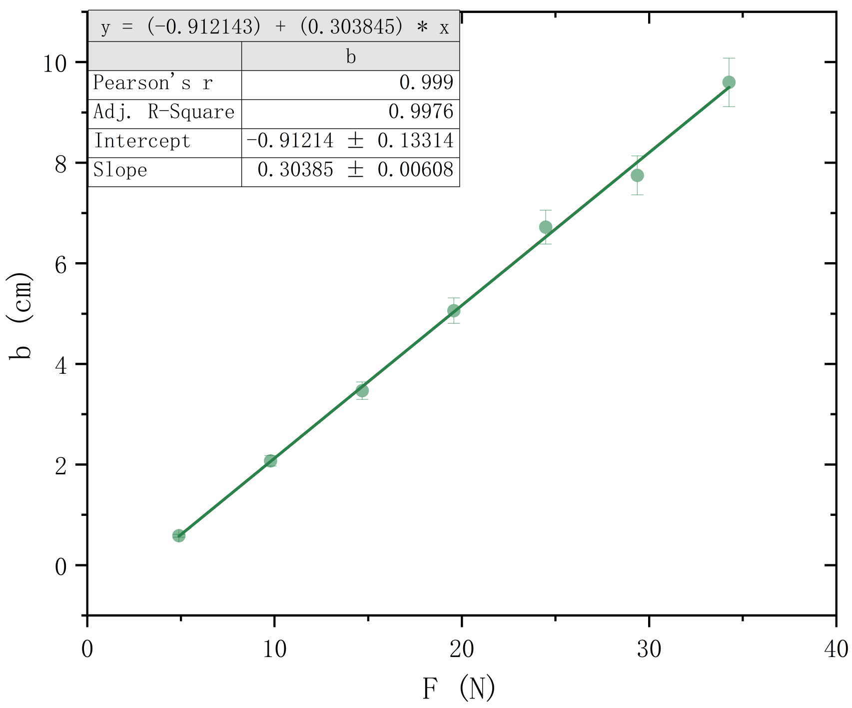

图 3: $b-F$ 最小二乘拟合结果图

$$\begin{aligned}
\hat{d} &= \frac{0.270+0.271+0.270+0.275+0.271+0.270}{6} + 0.021\ \mathrm{mm} && (10)\\
&= 2.92\times10^{-4}\,\mathrm{m} && (11)\\
\Rightarrow S &= \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{2.92\times10^{-4}}{2}\right)^2 = 6.697\times10^{-8}\,\mathrm{m}^2 && (12)\\
\hat{L} &= \frac{102.28+102.30+102.31}{3}\ \mathrm{cm} && (13)\\
&= 1.023\,\mathrm{m} && (14)\\
\hat{l} &= \frac{6.85+6.87+6.86}{3}\ \mathrm{cm} && (15)\\
&= 0.0686\,\mathrm{m} && (16)\\
\hat{D} &= \frac{136.60+136.57+136.60}{3}\ \mathrm{cm} && (17)\\
&= 1.3659\,\mathrm{m} && (18)
\end{aligned}$$

则由第 2页的式 (7) 可得:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2DL}{SlM}\\
&= \frac{2\times1.3659\times1.023}{6.697\times10^{-8}\times0.0686\times0.30385\times10^{-2}}\ \mathrm{Pa} \qquad (19)\\
&= 2.002\times10^{11}\,\mathrm{Pa}
\end{aligned}$$

5 误差分析与不确定度计算

5.1 不确定度计算

M 由 Origin 给出的数据可知相关系数 $r = 0.999$, 则线性回归拟合量 M 的不确定度为:

$$\begin{aligned} u_M &= \hat{M}\sqrt{\frac{1/r^2-1}{n-2}} \\ &= 0.30385 \times \sqrt{\frac{\frac{1}{0.999^2}-1}{7-2}} \\ &= 6.08 \times 10^{-3}\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{N}^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

查表可知, 当 $p = 0.95, \nu = 5$ 时,

$$t_{0.95} = 2.571 \tag{21}$$

则 M 的扩展不确定度为:

$$\begin{aligned} U_M &= t_{0.95}u_M \\ &= 2.306 \times 6.08 \times 10^{-3}\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{N}^{-1} \\ &= 0.014\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{N}^{-1} \quad (p=0.95) \end{aligned} \tag{22}$$

故 M 的测量值为:

$$M = (0.304 \pm 0.014)\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{N}^{-1} \tag{23}$$

S 查表可知 , $p = 0.95, \nu$=5 时,

$$t_{0.95} = 2.571 \tag{24}$$

则钢丝直径 d 的 A 类扩展不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned} U_{A,d} &= t_{0.95}u_{A,d} \\ &= t_{0.95}\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}} \\ &= 2.571 \times \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(d_i-\bar{d})^2}{6(6-1)}} \\ &= 2.571 \times \sqrt{\frac{3\times(0.270-0.271)^2+(0.275-0.271)^2}{6\times 5}}\ \mathrm{mm} \\ &= 2.05 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm} \end{aligned} \tag{25}$$

由于螺旋测微器允差 $\Delta_d = 0.004\,\mathrm{mm}$, 又其误差正态分布, 故取 $C = 3, k_{0.95} = 1.960$,d 的 B 类扩展不确定度可计算如下:

$$\begin{aligned} U_{B,d} &= k_{0.95} u_{B,d} = k_{0.95} \frac{\Delta_d}{C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.004}{3} \\ &= 2.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{26}$$

故合成不确定度为:

$$\begin{aligned} U_d &= \sqrt{U_{A,d}^2 + U_{B,d}^2} \\ &= \sqrt{(2.05 \times 10^{-3})^2 + (2.6 \times 10^{-3})^2}\,\mathrm{mm} \\ &= 3.3 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{27}$$

又 $S = \pi(\dfrac{d}{2})^2$, 则:

$$\frac{U_S}{S} = 2\frac{U_d}{d} \tag{28}$$

$$= 2 \times \frac{3.31e - 3}{0.292} \tag{29}$$

$$= 0.011 \quad (p = 0.95)$$

则 $U_S = 0.11 \times 6.697 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 = 0.08 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2$, 故最终 S 的测量值为:

$$S = (6.70 \pm 0.08) \times 10^{-8}\,\mathrm{m}^2 \quad (p = 0.95) \tag{30}$$

L 查表可知, 当 $p = 0.95, \nu = 2$ 时,

$$t_{0.95} = 4.303 \tag{31}$$

则钢丝长度 L 的 A 类扩展不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned} U_{A,L} &= t_{0.95} u_{A,L} \\ &= t_{0.95} \frac{\sigma_L}{\sqrt{n}} \\ &= 4.303 \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(L_i - \bar{L})^2}{3(3-1)}} \\ &= 4.303 \times \sqrt{\frac{(1.0228 - 1.023)^2 + (1.0231 - 1.023)^2}{3 \times 2}}\,\mathrm{m} \\ &= 3.9 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{32}$$

钢卷尺允差 $\Delta_L = 0.2\,\mathrm{cm}$, 而其误差为正态分布, 故取 $C = 3, k_{0.95} = 1.960$, 则其 B 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{B,L} &= k_{0.95} u_{B,L} = k_{0.95} \frac{\Delta_L}{C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.2}{3} \\ &= 0.013\,\mathrm{m} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{33}$$

合成不确定度为:

$$\begin{aligned} U_L &= \sqrt{U_{A,L}^2 + U_{B,L}^2} \\ &= \sqrt{(3.9 \times 10^{-4})^2 + (0.013)^2}\ \mathrm{m} \\ &= 0.013\,\mathrm{m} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{34}$$

故最终 L 的测量值为:

$$L = (1.023 \pm 0.013) \times 10^{-8}\,\mathrm{m} \quad (p = 0.95) \tag{35}$$

l 查表可知, 当 $p = 0.95, \nu = 2$ 时, $t_{0.95} = 4.303$ 则光杠杆臂长 l 的 A 类扩展不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned} U_{A,l} &= t_{0.95} u_{A,l} \\ &= t_{0.95} \frac{\sigma_l}{\sqrt{n}} \\ &= 4.303 \times \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{3} (l_i - \bar{l})^2}{3(3-1)}} \\ &= 4.303 \times \sqrt{\frac{(0.0685 - 0.0686)^2 + (0.0687 - 0.0686)^2}{3 \times 2}}\ \mathrm{m} \\ &= 2.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{36}$$

塑料直尺允差 $\Delta_l = 0.15\,\mathrm{mm}$, 而其误差为正态分布, 故取 $C = 3, k_{0.95} = 1.960$, 则其 B 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{B,l} &= k_{0.95} u_{B,l} = k_{0.95} \frac{\Delta_l}{C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.15 \times 10^{-3}}{3} \\ &= 9.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{37}$$

合成不确定度为:

$$\begin{aligned} U_l &= \sqrt{U_{A,l}^2 + U_{B,l}^2} \\ &= \sqrt{(2.5 \times 10^{-4})^2 + (9.8 \times 10^{-5})^2}\ \mathrm{m} \\ &= 2.7 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{38}$$

故最终 l 的测量值为:

$$l = (0.0686 \pm 0.0003)\,\mathrm{m} \quad (p = 0.95) \tag{39}$$

D 查表可知, 当 $p=0.95,\nu=2$ 时 , $t_{0.95}=4.303$. 则平面镜与标尺间距 D 的 A 类扩展不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned} U_{A,D} &= t_{0.95}u_{A,D} \\ &= t_{0.95}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \\ &= 4.303\times\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}(D_i-\overline{D})^2}{3(3-1)}} \\ &= 4.303\times\sqrt{\frac{2\times(1.366-1.3659)^2+(1.3657-1.3659)^2}{3\times 2}}\ \mathrm{m} \\ &= 4.3\times10^{-4}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{40}$$

由于 D 和 L 均为钢卷尺测量, 故它们的 B 类不确定度应相同, 则:

$$U_{B,D}=0.013\,\mathrm{m} \tag{41}$$

合成不确定度为:

$$\begin{aligned} U_l &= \sqrt{U_{A,l}^2+U_{B,l}^2} \\ &= \sqrt{(4.3\times10^{-4})^2+(9.8\times10^{-3})^2}\ \mathrm{m} \\ &= 0.013\,\mathrm{m}\quad(p=0.95) \end{aligned} \tag{42}$$

故最终 D 的测量值为:

$$D=(1.366\pm0.013)\,\mathrm{m}\quad(p=0.95) \tag{43}$$

E 综上所述,E 的相对不确定度为:

$$\begin{aligned} \frac{U_E}{E} &= \sqrt{\left(\frac{U_D}{D}\right)^2+\left(\frac{U_S}{S}\right)^2+\left(\frac{U_L}{L}\right)^2+\left(\frac{U_l}{l}\right)^2+\left(\frac{U_M}{M}\right)^2} \\ &= \sqrt{(9.5\times10^{-3})^2+0.012^2+0.013^2+(4.4\times10^{-3})^2+0.05^2} \\ &= 0.05\quad(p=0.95) \end{aligned} \tag{44}$$

则 $U_E=0.05\times2.002\times10^{11}\,\mathrm{Pa}=1.00\times10^{10}\,\mathrm{Pa}\quad(p=0.95)$ 故本实验最终测量结果为:

$$E=(2.002\pm0.100)\times10^{11}\,\mathrm{Pa}\quad(p=0.95) \tag{45}$$

5.2 误差分析与思考题

误差分析 本实验测量量 E 的相对不确定度为 5%, 应属于不确定度较大的情况, 即测量的精确度不高. 而在不确定度的计算过程中, 我们可以发现最小二乘拟合量 M 时误差的主要来源. 在实验者看来, 误差的产生原因有如下几个方面:

1. 在加减砝码过程中, 从望远镜中读数时, 由于是从望远镜中读数, 并且采用从像中读数, 这就造成了人估读误差较大.
2. 实验者操作时, 在加减砝码后等待的时间可能不足. 尤其是取下砝码等待钢丝恢复的时间应当略长, 否则钢丝拉伸并未到达稳定状态, 测得的数据存在误差.
3. 砝码历史较为悠久, 肉眼观察存在锈蚀情况, 其质量可能不再与标称值相同.
4. 平面镜的固定螺丝较松, 在钢丝拉伸过程中 L 可能产生了细微变化, 导致误差.

上述误差中, 既包含仪器磨损等客观因素, 也存在实验者操作失误等主观因素. 在今后的实验中, 实验者应当尽可能提高操作精度, 避免类似情况出现.

思考题

1. 可以通过增大 D, 减小 l 来提高放大率, 但这么做的好处有限, 而限制较大, 分析如下:
   (a) 增大放大率可使标尺读数 b 数值变大, 从而减小最小二乘拟合量 M 的不确定度. 同时, 标尺读数较大也可以使读数误差变小, 这是有助于测量的.
   (b) 但与此同时,D 原本就较大, 再增大后使其难以测量,l 原本数值较小, 再减小后使得其不确定度增加. 此外, 由于标尺读数范围较小, 放大倍率过大可能导致超出量程. 这对于测量是不利的.

   综合考虑如上两点, 应使 $\frac{D}{l}$ 值在某一范围内, 才能使测量的不确定度较小.
2. 主要需要考虑如下两个方面的因素:
   (a) 仪器的量程. 对于 D 和 L, 其本身数值较大, 只有采用钢卷尺等量程较大的仪器才能够测定; 而不能使用直尺等小量程仪器.
   (b) 仪器的允差. 对于量程均满足要求的仪器, 应在实验误差需要范围内选择允差较小者, 以降低不确定度. 例如对于 d, 采用直尺测量误差将过大, 且测量不便. 采用螺旋测微器便可有效降低其不确定度.

   综上可知, 测量长度仪器的选择使综合考虑了其量程与允差的结果.