切变模量测量

唐延宇 PB22030853

2023 年 4 月 26 日

1 实验目的

切变模量是指材料在受到剪切形变时, 其单位面积所受的力与单位长度上的切形变量的比值. 它是反映材料所具有的扭转能力大小的一个重要物理量. 因此, 在实际生产中, 产品的切变模量可以作为检验其质量的一个指标. 本实验的目的正是使用扭摆法测定金属丝的切变模量.

2 实验原理

通过力学分析计算可知, 金属丝的切变模量 G 与钢丝扭矩 M 存在如下关系:

$$G = \frac{2ML}{\pi R^4 \varphi} \tag{1}$$

其中,L 是金属丝的长度, 即上夹具下端与下夹具上端间的距离,R 是金属丝的半径. 在钢丝下端固定一圆盘, 可制成扭摆, 钢丝的扭矩与它扭过的角度满足如下关系:

$$M = D\varphi \tag{2}$$

其中,D 即金属丝的扭转模量. 依据转动定律可得:

$$M = I_0\ddot{\varphi} \tag{3}$$

其中 I_0 是圆盘的转动惯量. 整理上述各式可得金属丝转动的运动方程, 如下:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{I_0}\varphi = 0 \tag{4}$$

这表明扭摆的运动是一个简谐振动, 其角频率为 $\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$, 则其周期可表示为:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \tag{5}$$

由于金属圆盘的转动惯量 I_0 难以测量, 故可引入一质量为 m, 内径为 r_{in}, 外径为 r_{out} 的金属圆环, 其转动惯量 $I_1 = \frac{1}{2}\left(r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2\right)$. 实验时应保证圆环的质心与圆盘保持重合. 故放上圆环后, 扭摆的周期为:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \tag{6}$$

联立以上各式, 消去 I_0, 可解得金属丝的扭转模量 D 与切变模量 G:

$$D = \frac{2\pi^2 m\left(r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2\right)}{T_1^2 - T_0^2} \tag{7}$$

$$G = \frac{4\pi L m\left(r_{\text{in}}^2 + r_{\text{out}}^2\right)}{R^4\left(T_1^2 - T_0^2\right)} \tag{8}$$

此外, 对于实验中实际应测量的周期个数的分析详见附件一.

3 实验仪器

本实验主要使用的器材如下: 钢丝、扭摆、金属圆环、秒表、钢卷尺、游标卡尺、螺旋测微器. 其中各测量器材的最大允差为: 钢卷尺 $\Delta_L = 0.2\,\text{cm}$, 秒表 $\Delta_T = 0.01\,\text{s}$, 人计时误差 $\Delta_t = 0.1\,\text{s}$, 天平 $\Delta_m = 0.08\,\text{g}$, 螺旋测微器 $\Delta_D = 0.004\,\text{mm}$, 游标卡尺 $\Delta_r = 0.02\,\text{mm}$.

4 数据处理与误差分析

4.1 数据整理

本实验中的误差主要部分为 $\frac{\Delta R}{R}$, 因此除周期外其他测量量仅需要一次测量即可. 这些物理量的测量值如表 1所示.

表 1: 一次测量物理量数据记录表

钢丝长度 L/cm	圆盘质量 m/g	圆环内径 d_{in}/cm	圆环外径 d_{out}/cm
44.35	564.5	8.40	10.42

而对于钢丝半径 R 的测量, 为降低其随机误差, 实验者进行了八次测量, 测量结果如表 2所示.

表 2: 金属丝直径测量记录表

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
钢丝直径 D/mm	0.779	0.781	0.785	0.781	0.780	0.780	0.778	0.780
零点读数	$+0.005\,\text{mm}$							

周期的测量数据如表 3所示.

表 3: 周期测量数据记录表

序号	1	2	3
$t_1\,(\mathrm{N}=55)/\mathrm{s}$	204.91	205.41	205.20
$t_0\,(\mathrm{N}=40)/\mathrm{s}$	88.63	88.59	88.57

4.2 误差分析与不确定度计算

钢丝直径的平均值为 $\overline{D}=0.780\,\mathrm{mm}$, 则钢丝半径 $\overline{R}=0.390\,\mathrm{mm}$. 其 A 类不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned}u_{A,R}&=\frac{\sigma_R}{\sqrt{8}}\\&=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}(R_i-\overline{R})^2}{8(8-1)}}\\&=\sqrt{\frac{(0.3895-0.39)^2+2\times(0.3905-0.39)^2+(0.3925-0.39)^2+(0.389-0.39)^2}{8\times(8-1)}}\\&=3.78\times10^{-4}\,\mathrm{mm}\end{aligned}\tag{9}$$

查表可知, 当 $p=0.95,\nu$=7 时,

$$t_{0.95}=2.365\tag{10}$$

则 R 的 A 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned}U_{A,R}&=t_{0.95}u_{A,R}\\&=2.365\times3.78\times10^{-4}\,\mathrm{mm}\\&=8.94\times10^{-4}\,\mathrm{mm}\quad(p=0.95)\end{aligned}\tag{11}$$

螺旋测微器的最大允差为 $\Delta_D=0.004\,\mathrm{mm}$, 则 $\Delta_R=0.002\,\mathrm{mm}$, 又螺旋测微器的误差为正态分布, 取 $C=3$, 则 R 的 B 类不确定度为:

$$\begin{aligned}u_{B,R}&=\frac{\Delta_R}{C}\\&=\frac{0.002\,\mathrm{mm}}{3}\\&=6.67\times10^{-4}\,\mathrm{mm}\end{aligned}\tag{12}$$

查表可知, 当 $p=0.95$ 时,

$$k_{0.95}=1.960\tag{13}$$

则 R 的 B 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{B,R} &= k_{0.95} u_{B,R} \\ &= 1.960 \times 6.67 \times 10^{-4}\,\mathrm{mm} \\ &= 1.31 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{14}$$

综上, 合成不确定度为:

$$\begin{aligned} U_R &= \sqrt{U_{A,R}^2 + U_{B,R}^2} \\ &= \sqrt{(8.94 \times 10^{-4})^2 + (1.31 \times 10^{-3})^2}\,\mathrm{mm} \\ &= 1.59 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{15}$$

则 R 的测量值为:

$$R = (0.3900 \pm 0.0016)\,\mathrm{mm} \quad (p = 0.95) \tag{16}$$

相对不确定度为:

$$\frac{U_R}{R} = 4.1 \times 10^{-3} \quad (p = 0.95) \tag{17}$$

下面一并计算 m, r, L 的 B 类不确定度: 由于圆环内外径 r 由游标卡尺测定, 它的误差分布式为均匀分布, 应取 $C = \sqrt{3}, k_{0.95} = \sqrt{3} \times 0.95 = 1.645$. 而对于其他两个物理量, 其误差分布均为正态分布, 取 $C = 3, k_{0.95} = 1.960$. 各仪器允差为: 钢卷尺 $\Delta_L = 0.2\,\mathrm{cm}$, 天平 $\Delta_m = 0.08\,\mathrm{g}$, 螺旋测微器 $\Delta_D = 0.004\,\mathrm{mm}$, 游标卡尺 $\Delta_d = 0.02\,\mathrm{mm}$. 则这三个物理量的 B 类扩展不确定度可分别计算如下:

$$\begin{aligned} Ur &= k_{0.95} ur = k_{0.95} \frac{\Delta_d}{2C} \\ &= 1.645 \times \frac{0.01}{\sqrt{3}} \\ &= 9.50 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm} \\ &= 9.50 \times 10^{-4}\,\mathrm{cm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} Um &= k_{0.95} um = k_{0.95} \frac{\Delta_m}{C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.08}{3} \\ &= 0.05\,\mathrm{g} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} U_L &= k_{0.95} uL = k_{0.95} \frac{\Delta_L}{C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.2}{3} \\ &= 0.13\,\mathrm{cm} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{20}$$

那么, 这三个物理量的最终测量值可表示为:

$$r_{\text{in}} = (4.2000 \pm 0.0009)\,\text{cm} \quad (p = 0.95) \tag{21}$$

$$r_{\text{out}} = (5.2100 \pm 0.0009)\,\text{cm} \quad (p = 0.95) \tag{22}$$

$$m = (564.50 \pm 0.05)\,\text{g} \quad (p = 0.95) \tag{23}$$

$$L = (44.35 \pm 0.13)\,\text{cm} \quad (p = 0.95) \tag{24}$$

下面计算周期测量的不确定度: T_1, T_0 的测量均值分别为:$\overline{T}_1 = 3.730\,\text{s}, \overline{T}_0 = 2.215\,\text{s}$. 则 T_1, T_0 的 A 类不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned} u_{A,T_1} &= \frac{\sigma_{T_1}}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}(T_{1_i} - \overline{T}_1)^2}{3(3-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{(3.726-3.73)^2 + (3.735-3.73)^2 + (3.731-3.73)^2}{3 \times (3-1)}}\ \text{s} \\ &= 2.6 \times 10^{-3}\,\text{s} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} u_{A,T_0} &= \frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}(T_{0_i} - \overline{T}_0)^2}{3(3-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{(2.216-2.215)^2 + (2.215-2.215)^2 + (2.214-2.215)^2}{3 \times (3-1)}}\ \text{s} \\ &= 5.7 \times 10^{-4}\,\text{s} \end{aligned} \tag{26}$$

查表可知, 当 $p = 0.95, \nu{=}2$ 时,

$$t_{0.95} = 4.303 \tag{27}$$

故周期测量的 A 类扩展不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{A,T_1} &= t_{0.95} u_{A,T_1} \\ &= 4.303 \times 2.6 \times 10^{-3}\,\text{s} \\ &= 0.011\,\text{s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} U_{A,T_0} &= t_{0.95} u_{A,T_0} \\ &= 4.303 \times 5.7 \times 10^{-4}\,\text{s} \\ &= 2.48 \times 10^{-3}\,\text{s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{29}$$

对于周期测量的 B 类不确定度, 由于 $\Delta_t \gg \Delta_T$, 故可以只考虑人的计时误差. 由于人开始与结束计时时存在两次操作, 可取 $\Delta_t = 0.2\,\mathrm{s}$. 由于误差分布为正态分布, 取 $C = 3, k_{0.95} = 1.960$, 可得 T_1, T_0 的 B 类不确定度为:

$$\begin{aligned} U_{B,T_1} &= k_{0.95}\frac{\Delta_{T_1}}{C} = k_{0.95}\frac{\Delta_t}{55C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.2}{3 \times 55} \\ &= 2.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} U_{B,T_0} &= k_{0.95}\frac{\Delta_{T_0}}{C} = k_{0.95}\frac{\Delta_t}{40C} \\ &= 1.960 \times \frac{0.2}{3 \times 40} \\ &= 3.3 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{31}$$

由上可知,T_1, T_0 的合成不确定度可计算如下:

$$\begin{aligned} U_{T_1} &= \sqrt{U_{A,T_1}^2 + U_{B,T_1}^2} \\ &= \sqrt{(0.011)^2 + (2.4 \times 10^{-3})^2}\ \mathrm{s} \\ &= 0.011\,\mathrm{s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} U_{T_0} &= \sqrt{U_{A,T_0}^2 + U_{B,T_0}^2} \\ &= \sqrt{(2.48 \times 10^{-3})^2 + (3.3 \times 10^{-3})^2}\ \mathrm{s} \\ &= 0.0004\,\mathrm{s} \quad (p = 0.95) \end{aligned} \tag{33}$$

故 T_1, T_0 的测量值最终可表示为:

$$T_1 = (3.730 \pm 0.011)\,\mathrm{s} \quad (p = 0.95) \tag{34}$$

$$T_0 = (2.2150 \pm 0.0004)\,\mathrm{s} \quad (p = 0.95) \tag{35}$$

由前所述公式, 可得 D, G 的平均值为:

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \frac{2\pi^2 \hat{m}\left(\hat{r}_{\mathrm{in}}^2 + \hat{r}_{\mathrm{out}}^2\right)}{\hat{T}_1^2 - \hat{T}_0^2} \\ &= \frac{2\pi^2 \times 0.5645\left(0.042^2 + 0.0521^2\right)}{3.73^2 - 2.215^2}\ \mathrm{Pa} \\ &= 5.54 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \overline{G} &= \frac{4\pi \hat{L}\hat{m}\left(\hat{r}_{\mathrm{in}}^2 + \hat{r}_{\mathrm{out}}^2\right)}{\hat{R}^4\left(\hat{T}_1^2 - \hat{T}_0^2\right)} \\ &= \frac{4\pi \times 0.4435 \times 0.5645 \times \left(0.042^2 + 0.0521^2\right)}{(0.39 \times 10^{-3})^4 \times (3.73^2 - 2.215^2)}\ \mathrm{Pa} \\ &= 6.76 \times 10^{10}\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{37}$$

扭转模量 D 与切变模量 G 的相对不确定度可如下计算:

$$\begin{aligned}\frac{U_D}{D} &= \left(\left(\frac{U_m}{m}\right)^2+\left(\frac{2r_{\text{in}}U_r}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}\right)^2+\left(\frac{2r_{\text{out}}U_r}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}\right)^2+\left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2-T_0^2}\right)^2+\left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2-T_0^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 9.1\times10^{-3} \quad (p=0.95)\end{aligned} \tag{38}$$

$$U_D = D\frac{U_D}{D} = 0.05\times10^{-3}\,\mathrm{Pa}\,(p=0.95) \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\frac{U_D}{D} = &\left(\left(\frac{U_L}{L}\right)^2+\left(\frac{4U_R}{R}\right)^2+\left(\frac{U_m}{m}\right)^2+\left(\frac{2r_{\text{in}}U_r}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}\right)^2\right.\\ &\left.+\left(\frac{2r_{\text{out}}U_r}{r_{\text{in}}^2+r_{\text{out}}^2}\right)^2+\left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2-T_0^2}\right)^2+\left(\frac{2T_1U_{T_1}}{T_1^2-T_0^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 0.019 \quad (p=0.95)\end{aligned} \tag{40}$$

$$U_G = G\frac{U_G}{G} = 0.13\times10^{10}\,\mathrm{Pa}\,(p=0.95) \tag{41}$$

故本实验的最终测量结果为:

$$D = (5.54\pm0.05)\times10^{-3}\,\mathrm{Pa} \quad (p=0.95) \tag{42}$$

$$G = (6.76\pm0.13)\times10^{10}\,\mathrm{Pa} \quad (p=0.95) \tag{43}$$

5 思考题

1. 满足. 根据实验讲义中给出的公式 $\gamma = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{\varphi}{L}$, 代入实验时使用的摆角 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 可得:$\gamma = 4.14\times10^{-3}$, 较 1 小三个数量级, 可以认为 $\gamma \ll 1$.
2. 为提高测量精度, 本实验在设计时做了如下安排:

    - 先进行预实验, 确定各物理量误差的数量级, 从而确定主要误差与次要误差.
    - 对于可以控制的周期项带来的误差, 通过控制所测周期数来控制其大小, 使其不超过主要误差的 $\frac{1}{5}$.
    - 将 T_1, T_0 视作独立变量, 在尽可能减少误差的同时减少实验者工作量, 防止因疲倦引起计时误差增加.

    在具体测量时, 应注意:

    - 实验前, 要保证钢丝竖直, 圆盘水平.

- 测量钢丝直径时, 因其为主要误差项, 可多测几次以减少 A 类不确定度; 同时也要注意在钢丝的各个部位取样, 以不失一般性.
- 螺旋测微器读数时, 应注意其刻度线的位置, 避免因刻度线被旋钮杆遮挡而导致读数错误.
- 测量内外径时, 要注意不要把游标卡尺与圆环卡的太死, 防止二者间的摩擦对仪器产生损伤.
- 进行周期测量时, 要在圆盘上确定一较明显的参照物用来标定圆盘的平衡位置, 以保证圆盘转动时开始与停止计时的时刻均是转速较大的时刻, 以减少计时误差.
- 在转动圆盘时, 最好让它的摆动角度较大, 以保证终止计时时圆盘的速度较大, 减少计时误差.