理论力学 A

2024 年秋季学期第二次习题课

助教 唐延宇

中国科学技术大学物理学院 2022 级本科生

yanyutang@mail.ustc.edu.cn

December 2, 2024

内容摘要

1. 课堂知识点整理
   - 运动学
   - Lagrange 力学
   - 线性振动

爱因斯坦求和约定

基本内容

相同指标出现两次(即称为 dumpy index)自动在所有可能取值范围内求和;出现一次为自由指标,可以在取值范围内任意取值.

注意:

- 为避免混淆,多次求和时需要引入新的哑指标,一般按照字母表顺序引入,如:$(ABC)_{ij} = A_{ik}B_{kl}C_{lj}$.
- 矢量点乘、叉乘运算的分量写法:$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$.
- Levi-Civita 张量相关:
  - $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$(注意逆用:把两项作差的式子写成一项)
  - $\epsilon_{ijk}A_{im}A_{jn}A_{kl} = \epsilon_{mnl} \det A$
- 熟悉求和约定的技巧:多写多看.
- 复习:HW2 Problem 1-3.

位形空间中体系运动的描述

假设

体系的位置状态由 N 组坐标描述：$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_N)=(u_1,u_2,\ldots,u_{3N})$，体系中存在 k 个完整约束：$f_\alpha(\boldsymbol{r},t)=0,\alpha=1,2,\ldots,k$，而且这些约束是相互独立的：$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial u_i}\right)=k$.

特点：

1. 体系自由度数为 $s=3N-k$，进而引入 s 个相互独立的广义坐标 $q=(q_1,q_2,\ldots,q_s)$
2. 位形曲面的 s 个切向量：$\boldsymbol{\tau}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ 和 k 个法向量：$\boldsymbol{n}_\alpha=\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}}$
3. 变换方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q,t)$，对时间求导：$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$
4. 导数关系：

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i},\qquad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i},\qquad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$$

5. 动能：$T=\frac{1}{2}m_a\dot{\boldsymbol{r}}_a^2=T(\boldsymbol{r})$ 采用广义坐标表示：

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_a\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_a}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a}}}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_a}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a}}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m_a\frac{\partial \boldsymbol{r}_a}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_a}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j+\left(m_a\frac{\partial \boldsymbol{r}_a}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_a}{\partial t}\right)\dot{q}_i+\frac{1}{2}m_a\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_a}{\partial t}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+B_i\dot{q}_i+C
\end{aligned}
$$

6. $\frac{\partial T}{\partial q_i}=\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\tau}_i$

哈密顿原理（最小作用量原理）:

经典力学意义下的一个保守力学体系，在相同的时间内的任何真实的动力学过程 $P \to Q$，必定是满足使得作用量泛函:

$$S = \int_P^Q L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t$$

取极值的，即:

$$\delta S = 0.$$

其中，我们将作用量泛函的积分核 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ 称为体系的 Lagrange 函数，经典力学意义下体系的运动方程 (Equation of Motion, EOM): $\delta S = 0$ 也可等价地由拉氏方程表为:

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta q_i} \triangleq \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

在非相对论性的牛顿力学中，如果体系是**保守的**(主动力存在对应的势能或广义势能 V)，并且**约束是理想的**(约束力对任何可能的虚位移均不做功)，那么体系的拉氏量便可以写为体系的动能与势能之差：

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q_i) \right]$$

代入 Lagrange 方程，得到体系的 EOM：

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

这说明了分析力学的形式体系 (Formalism) 得出的结论符合于牛顿第二定律给出的结果.

处理实际力学问题的一般思路:

1. 确定体系的自由度数目, 写出体系的拉氏量. 一个比较通用的做法是使用广义坐标表示直角坐标(也即写出变换方程), 使用直角坐标表示出体系的动能和势能, 再将变换方程代入. 这样的方法思维难度较低, 但往往具有更大的计算量.
2. 求解拉格朗日方程, 得到体系位形随时间的演化. 这一过程往往可以通过寻找体系的守恒量(初次积分)得到简化. 常见的守恒量有两个:
   - 若体系的拉氏量不显含时, 那么雅可比积分

     $$h = \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \quad \text{守恒;}$$

   - 若体系的拉氏量不显含某一个特定的广义坐标 q_i, 那么与之共轭的广义动量:

     $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{守恒.}$$

带乘子的 Lagrange 方程

Lagrange 方程本身是牛顿第二定律在位形曲面切方向投影得到的结果，它略去了法向上的信息，因此自然无法用于约束力的求解. 为求约束力，我们可以设想约束解除，得到带乘子的 Lagrange 方程；

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}}$$

在上式中，$\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}$ 实为第 α 个约束对第 i 个广义坐标的广义力，如果质点所处的空间采用正交曲线坐标系描述，那么约束力与广义力的关系便是:(不求和)

$$Q_i = H_i N_i$$

H_i 表示第 i 个坐标的拉梅系数:

$$H_i = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \right|$$

对称性与守恒量

在一个给定的无穷小变换:

$$q_k \rightsquigarrow Q_k = Q_k(q, t; \varepsilon), \quad t \rightsquigarrow \tau = \tau(q, t; \varepsilon)$$

下, 如果体系的拉氏量满足如下变换性质:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} L\left(Q, \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau}, \tau\right) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q, t; \varepsilon)$$

$\varepsilon = 0$ 对应恒等变换, 那么便称体系在该变换下是对称的, 由此可构造出守恒量:

$$\Gamma = p_k s_k + p_t s_t - G.$$

其中 (对 ε 的导数均在 0 附近进行):

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \; p_t = -h, \; s_k = \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}, \; s_t = \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}, \; G = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$$

简正频率与简正模

为了求解多自由度体系在稳定平衡位置$q^{(0)}$附近的小幅振动，我们引入：

$$\underline{\text{简谐近似}}: V = \frac{1}{2}K_{ij}\xi_i\xi_j,\ T = \frac{1}{2}M_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j \Rightarrow M\ddot{\xi} + K\xi = 0$$

这是在平衡位置附近对体系动能和势能进行展开，保留至二阶项，代入 Lagrange 方程的结果. 其中，$\xi = q - q^{(0)}$ 表征系统相对平衡位置的偏离，是一个小量；M_{ij}, K_{ij} 是按下述方式定义的对称（半）正定方阵：

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\xi}_i\partial\dot{\xi}_j},\ K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial\xi_i\partial\xi_j}$$

为求解此方程，我们可以通过线性变换 $\xi = A\eta$ 对体系进行解耦，旨在消去矩阵中的非对角元. 具体地，通过久期方程：

$$\det\left(\omega^2 M - K\right) = 0, \quad \rightsquigarrow \omega_a^2 \geqslant 0$$

得到简正频率 $\omega_a\ (a = 1, 2, \ldots, n)$，再求解本征矢方程：

$$(\omega^2 M - K)X = 0, \quad \rightsquigarrow A^{(a)} \propto X$$

如此得到的 K 矩阵在以 M 为度规的线性空间中的本征值与本征矢量的集合, 称为体系的简正模, 具体地:

$$\omega_a \leftrightarrow A^{(a)} \begin{cases} \omega_a = 0 & \rightsquigarrow \eta_a = \lambda_a t + \phi_a \\ \omega_a > 0 & \rightsquigarrow \eta_a = \lambda_a \cos(\omega_a t + \phi_a) = \eta_a(0)\cos\omega_a t + \frac{\dot{\eta}_a(0)}{\omega_a}\sin\omega_a t \end{cases}$$

其中, λ_a, ϕ_a 均为可通过初值确定的积分常数. 最终, 体系的解可一般地表示为:

$$\xi = A\eta = \sum_a A^{(a)}\eta_a = A^{(1)}\eta_1 + A^{(2)}\eta_2 + \cdots + A^{(n)}\eta_n$$

注: 如需利用 Gram-Schmidt 程序对本征矢量进行正交归一化, 请牢记这里的内积是由矩阵 M 诱导的, 而非单位矩阵 I, 即:

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T M \beta$$