理论力学 A 第八次作业答案

助教　唐延宇 李伟霆

2024 年 11 月 26 日

Problem 1.

体系存在约束：$z = r\tan\alpha$，从而 $\dot z = \dot r \tan\alpha$，总能量为：

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\phi^2 + \dot z^2) + mgr\tan\alpha \\
&= \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\dot r}{\cos\alpha}\right)^2 + r^2\dot\phi^2\right) + mgr\tan\alpha
\end{aligned}
$$

期中 ϕ 为小球相对 z 轴转过的角度，角动量 $l \triangleq mr^2\dot\phi$ 守恒，从而有效势能：

$$
\begin{aligned}
U_{\text{eff}} &= \frac{l^2}{2mr^2} + mgr\tan\alpha \\
\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_0} &= -\frac{l^2}{mr_0^3} + mg\tan\alpha = 0 \Rightarrow r_0^3 = \frac{l^2}{m^2 g\tan\alpha} \\
\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{r_0} &= \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0
\end{aligned}
$$

从而 $r_0 = \frac{z_0}{\tan\alpha}$ 是稳定平衡位置，平衡位置附近微振动频率为：

$$
\omega = \sqrt{\frac{U''}{m/\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha\cos\alpha}{r_0}} = \frac{\sqrt{3gz_0}}{r_0}\cos\alpha = \sqrt{\frac{3g\sin^2\alpha}{z_0}}
$$

注：本题有不少同学没有考虑 z 方向上的扰动，需要留意一下.

Problem 2.

计算有效势能：

$$
\begin{aligned}
U_{\text{eff}} &= \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\
\frac{\partial U}{\partial r} &= -\frac{l^2}{mr^3} + \alpha\left(\frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\
\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_0} &= 0 \Leftrightarrow \frac{l^2}{mr_0^3} = \alpha\left(\frac{1}{ar_0} + \frac{1}{r_0^2}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)
\end{aligned}
$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{r_0} = \frac{\alpha}{a^2 r_0^3}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)(a^2+ar-r^2)\Big|_{r_0} = 0$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a$$

从而 $r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ 时，稳定；$r > \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ 时，不稳定，对于 $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ 的情况：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^3 U}{\partial r^3}\right|_{r_0} &= -\frac{12l^2}{mr^5} + \frac{\alpha}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\left(\frac{6}{r^3}+\frac{6}{ar^2}+\frac{3}{a^2 r}+\frac{1}{a^3}\right)\Big|_{r_0} \\ &= -\frac{\alpha}{r_0^4}\exp\left(-\frac{r_0}{a}\right)\left(\frac{r_0}{a}+2\right) < 0\end{aligned}$$

故不稳定. 因此，最终结论为：$r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ 时，稳定；$r \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ 时，不稳定.

注：对于有效势能二阶导数为 0 的点，应该求更高阶导数以确认这一点处函数的性质，许多同学没有进行验证，可以留意一下.

Problem 3.

利用一阶方程：

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2}(E-U),$$

将：

$$u = \frac{1}{r} = \frac{3+2\cos(\theta/2)}{2a} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\sin(\theta/2)}{2a}$$

代入，并利用 $U|_{r\to\infty} = 0$ 即可得到：

$$E = -\frac{5k}{12a^2} \qquad U = -k\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{ar}\right)$$

下求稳定圆周运动的轨道，有效势能：

$$U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} - k\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{ar}\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Leftrightarrow l^2 = mk\left(2+\frac{r_0}{a}\right)$$

符合实际情况的解要求：$r_0 > 0 \Leftrightarrow l^2 > 2km$，此时：

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{r_0} = \frac{1}{r_0^4}\left(\frac{3l^2}{m} - 6k - \frac{2kr_0}{a}\right) > 0$$

故 $l^2 > 2km, l^2 = mk\left(2+\frac{r_0}{a}\right)$ 时轨道稳定，稳定平衡位置附近微震动频率：

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(r_0)}{m}} = \sqrt{\frac{k}{amr_0^3}}$$

注：本题的易错点为：$l=\sqrt{\frac{8km}{3}}$ 仅仅是粒子在题目所给的轨道上运动时的角动量，不能在其他情况下随意代入. 虽然角动量是中心力问题中的守恒量，但“守恒”一词自然是对于同一条运动轨道上的粒子的一个运动过程而言的. 这个概念问题需要大家辨析清楚.