理论力学 A 第一次作业答案

助教 唐延宇

2024 年 9 月 26 日

Problem 1. 设体系总能量为 E，则根据课上公式：

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}} \tag{1}$$

其中 $x_{\min}, x_{\max}(x_{\min} < x_{\max})$ 分别为方程 $E = U(x)$ 的两个根. 又据 $U(x)$ 的表达式关于 x 具有明显的对称性，设 x_0 为方程 $E = U(x)$ 的正根，则有：

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}} \tag{2}$$

下采用式 (2) 求解下面两个具体周期.

(1) 若：

$$U = -\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

显然有界运动要求 $-U_0 < E < 0$（**注：应该先确定参数的取值范围再具体求解**），那么：

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{2m}\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E + \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x}}} \\ &= 2\sqrt{2m}\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}\sinh \alpha x}{\sqrt{E\cosh^2 \alpha x + U_0}} \end{aligned}$$

令 $k^2 = -1 - \frac{U}{E_0}, \tilde{x} = \sinh \alpha x$，换元可得：

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{-E}}\int_0^{\tilde{x}_0} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\sqrt{k^2 - \tilde{x}^2}} \\ &= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{-E}} \arcsin \frac{\tilde{x}_0}{k} \end{aligned}$$

方程 $-\frac{U_0}{\cosh^2 \alpha x_0} = E$ 给出：

$$\sinh^2 \alpha x_0 = -1 - \frac{U_0}{E} = k^2$$

从而：

$$T = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{-E}} \tag{3}$$

(2) 若：

$$U = U_0 \tan^2 \alpha x$$

显然有界运动要求 $E > 0$，那么：

$$\begin{aligned}
T &= 2\sqrt{2m}\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U_0 \tan^2 \alpha x}} \\
&= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{E}}\int_0^{\sin\alpha x_0} \frac{\mathrm{d}\sin\alpha x}{\sqrt{1 - \frac{U_0+E}{E}\sin^2\alpha x}} \\
&= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{U_0+E}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{U_0+E}{E}}\sin\alpha x_0\right) \\
&= \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{U_0+E}}
\end{aligned}$$

注：涉及三角函数的积分不妨考虑换元消根号.

Problem 2. $AB, AB, AB^T, A^T B$

Problem 3. $T_{ij}S_{ij} = -T_{ji}S_{ji} = -T_{ij}S_{ij} \Rightarrow T_{ij}S_{ij} \equiv 0$

Problem 4. 根据定义：

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

则有：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{m1} & \delta_{n1} \\ \delta_{l2} & \delta_{m2} & \delta_{n2} \\ \delta_{l3} & \delta_{m3} & \delta_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

其中利用了矩阵乘积的行列式的性质 $\det(AB) = \det A \det B$，以及：

$$\delta_{ir}\delta_{lr} = \delta_{il}.$$

Problem 5.

$$RR^T = I \Rightarrow \begin{cases} a2 + 2b^2 & = 1 \\ b^2 + 2ab & = 0 \end{cases}$$

$$\det R = 1 \Rightarrow a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = 1$$

$\Rightarrow (a, b) = (1, 0)$ or $(a, b) = (-1/3, 2/3)$

注：转动矩阵要求行列式为 $+1$.

Problem 6. (1)

$$x_i' = \lambda_{ij} x_j + a_i \Rightarrow \mathrm{d}x_i' = \lambda_{ij} \mathrm{d}x_j$$

那么：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}l'^2 &= \mathrm{d}x_k' \mathrm{d}x_k' \\
&= \lambda_{km} \mathrm{d}x_m \lambda_{kn} \mathrm{d}x_n \\
&= \lambda_{km} \mathrm{d}x_m \lambda_{kn} \mathrm{d}x_n \\
&= \delta_{im} \delta_{jn} \lambda_{km} \lambda_{kn} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j
\end{aligned}$$

又：

$$\mathrm{d}l^2 = \delta_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$$

因此：

$$\begin{aligned}
\delta_{im} \delta_{jn} \lambda_{km} \lambda_{kn} &= \delta_{ij} \\
\Rightarrow \lambda_{ik} \lambda_{jk} &= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

即：

$$\lambda \lambda^T = I$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lambda_{ik} \lambda_{ij} &= \delta_{kj} \\
\Rightarrow \lambda_{ik} x_i' = \lambda_{ik} \lambda_{ij} x_j &= \delta_{kj} x_j = x_k
\end{aligned}$$

注：本题采用矩阵形式也能给出一个合理的证明，
然而更建议大家熟悉一下采用求和指标运算的形式.